

本測驗為計算證明題，請將計算寫在答案紙上，務必標明題號。
過程

1. 已知二多項式 $f(x) = x^3 + (a+1)x^2 + 5x + (a-2)$ 與 $g(x) = x^3 + ax^2 + 6x + a$ 有一次公因式，求 a 值，並將 $f(x)$ 與 $g(x)$ 寫成因式積。(14%)

2. 設 $a^x = b^y = (ab)^z$ ， $xyz \neq 0$ ， a, b 均為不等於 1 的正數，

試證： $z = \frac{xy}{x+y}$ (12%)

3. 設 $f(x) = 2(\sin^3 x + \cos^3 x) - 8 \sin x \cos x + 1$

若 $t = \sin x + \cos x$ ，

(i) 將 $f(x)$ 表成 t 的函數，

(ii) 求 $f(x)$ 的最大值、最小值。(18%)

4. z_1, z_2, \dots, z_n 是已知的 n 個複數且 $z_1 + z_2 + \dots + z_n = i$ ， $i = \sqrt{-1}$ ，若 z 是複數平面上 $|z| = 1$ 的點，試求

$f(z) = |z - z_1|^2 + |z - z_2|^2 + \dots + |z - z_n|^2$ 的最大值、最小值。(17%)

5. 同時投擲 n 個相同的骰子，如果出現的最大與數、最小與數分別為 M_n, m_n ，試問 $M_n - m_n > 1$ 之機率為何？(17%)

6. 試就 a 值說明拋物線 $y = 2x^2$ 與圓 $x^2 + (y-a)^2 = 1$ 相交的情形。(22%)