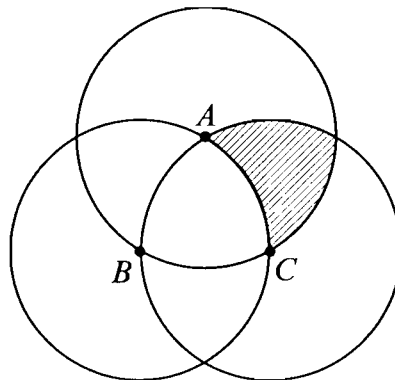


准考証號碼:

姓名:

說明：共九題，九題都要作，並請寫完整的解答過程。背面也可作答，但請將題號註明清楚。

1. (15 分) 如下圖，設 A 、 B 、 C 為三個半徑為 1 cm 的圓之圓心。求斜線部分的面積。



2. (20 分) 設 Q 為線段 BC 上的一點，又設 P 為三角形 ABC 內一點且 P 在 AQ 線段上。若 a 、 b 、 c 為正實數，滿足

$$a\vec{PA} + b\vec{PB} + c\vec{PC} = 0$$

證明：

$$\vec{PQ} = \frac{a}{b+c}\vec{AP}$$

3. (20 分)

(a) 求行列式 $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$ 的極大值，其中 x_1, x_2, y_1, y_2 滿足 $x_1^2 + x_2^2 = 1$ 及 $y_1^2 + y_2^2 = 2$ 。

(b) 求行列式 $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$ 的極大值，其中必須滿足 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ ， $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 2$ 及 $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 3$ 。

[提示：可以用幾何方法考慮此問題]

4. (25 分) 一隻兔子跳樓梯往上跳，它每次可以跳一階或兩階。令 a_n 表示兔子跳到第 n 階的所有可能方法數目。舉例來說： $a_1 = 1$ 、 $a_2 = 2$ 、 $a_3 = 3$ 、 $a_4 = 5$ 、 $a_5 = 8$ 。

(a) 證明：當 $n \geq 3$ 時， $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ 。

(b) 兔子跳到第三階的可能方法有 $(1, 1, 1)$ 即一階、一階、一階； $(1, 2)$ 即一階再二階； $(2, 1)$ 即二階再一階。所以 $a_3 = 3$ 。用這種列舉所有可能的方法來證明 $a_5 = 8$ ，及 $a_6 = 13$ 。

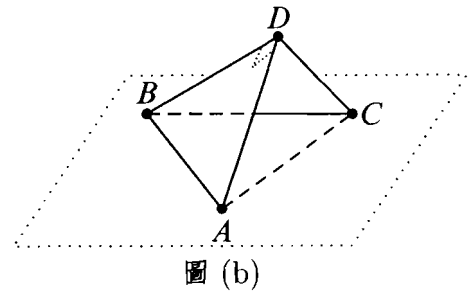
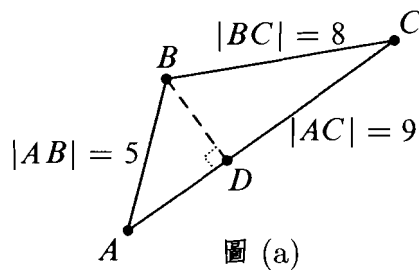
(c) 證明：

$$a_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} C_k^{n-k}$$

其中 $\lfloor n/2 \rfloor$ 代表 $n/2$ 的整數部分。(提示：考慮 $n-k$ 代表跳的步數)

5. (25 分) 甲公司舉辦促銷活動, 凡購物即可參加抽獎活動, 抽中 1 號者 可得與該次購物等值的該公司禮券, 抽中 2 號者獲得再抽一次的機會, 唯獎金只能獲得若上一次有抽中之金額為 0.9 倍的禮券, 抽中 3 號「銘謝惠顧」, 即沒獲得任何獎項。舉例來說, 如果依序抽到 2 號、2 號、1 號, 則可以獲得購物金額為 0.81 倍的禮券。假設每一次抽獎, 抽中 1 號的機會為 $\alpha > 0$, 抽中 2 號的機會為 $\beta > 0$, 抽中 3 號的機會為 $\gamma > 0$, 而且 $\alpha + \beta + \gamma = 1$ 。
- (a) 試求購物抽獎最終可抽中禮券的機率?
- (b) 平均一個顧客要抽幾次才能確定有沒有中獎?
- (c) 假設該公司每位顧客平均購物金額 1000 元, 試求平均每位顧客的中獎金額。

6. (20 分) 如圖 (a), ABC 為一三角形的紙卡, D 在線段 AC 上且 BD 垂直 AC , 各邊長度如圖上標示。



- (a) 求 AD 線段長。
- (b) 將此紙卡沿著 BD 線折起, A, B, C 在桌面上, D 在上方, 且 $\angle ADC = 60^\circ$, 如圖 (b)。求四面體 $ABCD$ 的體積。
7. (20 分) 若 $r + \sqrt{r}$ 為方程式 $x^3 + ax + b$ 的一根, 其中 a, b, r 為有理數且 \sqrt{r} 為無理數。
- (a) 證明 $r^3 + 3r^2 + ar + b = 0$ 及 $3r^2 + r + a = 0$ 。
- (b) 用 (a) 或其他方法, 證明 $r - \sqrt{r}$ 為方程式 $x^3 + ax + b$ 的另一根。
- (c) 當 $a \neq \frac{4}{3}$ 時, 求 r 的值。

8. (15 分) 求

$$\sum_{n=1}^{1023} [\log_2 n],$$

其中 $[\log_2 n]$ 代表 $\log_2 n$ 的整數部分。[提示：用 $[\log_2 n]$ 的值分類]

9. (15 分) 給定正整數 $n > 1$, 角 θ 滿足 $0 < \theta < \pi$ 。證明: $\sin n\theta < n \sin \theta$ 。[提示: 可以用數學歸納法。和角公式: $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ 。]