

國立成功大學數學系

112 學年度

學士班申請入學

數學學科筆試

試題說明：

- 1.本試題含 11 大題，每題 10 分，總分共計 110 分。
- 2.測驗時間：150 分鐘
- 3.請在每一試題所屬頁面作答。若使用試題背面答題，請標示清楚題號。
- 4.請完整寫出解答過程。
- 5.本考試卷總共有 12 頁。

題號	1	2	3	4	5	6
分數						
題號	7	8	9	10	11	
分數						

個人申請編號：

姓名：

1. 空間中 O 為原點，設 $\vec{u} = (1, 3, 2)$ 與 $\vec{v} = (2, 7, 1)$ 。令 Ω 為滿足 $\overrightarrow{OP} = s\vec{u} + t\vec{v}$ 的所有點 P 所形成的區域。試計算以下 s, t 範圍所決定之 Ω 的面積。
- (1) $0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 2$ 。
 - (2) $s, t \geq 0$ 且 $s + t \leq 1$ 。

2. 某放射性物質之質量 $y(t)$ 呈現指數衰退變化

$$y(t) = y_0 \cdot 10^{-kt} ,$$

其中 y_0 與 k 為常數， t 之單位為年。已知該物質半衰期為半年。若 T 為該物質衰退為原質量之百分之一需要的時間，且 T 介於相鄰兩正整數 $N, N+1$ 之間，試求 N 。備註：半衰期是指某種特定物質的濃度經過某種反應降低到剩下初始時一半所消耗的時間。若 T_0 為半衰期，則 $y(T_0) = \frac{y_0}{2}$ 。

3. 假設1到9每個數字被取到的機率是相等的，今從中任取五個不重複的數字。請問取出的五個數字中，最大數字的期望值是多少？

4. 一間工廠為了解其生產產品的良率，進行一個檢驗流程。這個流程將良品檢驗成良品的機率是90%，檢驗成不良品的機率是10%；而這個流程將不良品檢驗成不良品的機率是80%，檢驗成良品的機率則是20%。而被這個檢驗流程檢驗為良品的100個產品中，仔細用人工確實檢查一次，發現中間仍有25個是不良品。請問，這間工廠生產產品的良率是多少？若收集這個檢驗流程所檢驗出的不良品，約有多少比例是良品呢？

5. 設 $a, b > 0$ 且 O 為坐標平面上的原點。已知 P, Q 為橢圓 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上的兩點且

$\overline{OP} \perp \overline{OQ}$ 。試證明 $\frac{1}{OP^2} + \frac{1}{OQ^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ 。

6. 給一邊長為1的正六邊形 $ABCDEF$ ， G 為 E, F 的中點。連 \overline{AC} 並作 $\angle CAB$ 的角平分線交 \overline{BC} 於 H 點。試求 $\overline{AG} \cdot \overline{AH}$ 。

7. 試證明對所有的正整數 n ， $7^{2n} + 2256n - 1$ 是 2304 的倍數。
提示：可使用數學歸納法或二項式定理，或是其他方法。

8. 設 a, b 為實數且 $x^4 - 4x^2 + ax + b = 0$ 有四個實根。試證明 $|b| \leq 2$ 。

9. 已知 θ 為銳角且 $\sin \theta = \frac{5}{13}$ 。試證明對所有的正整數 n ， $\sin n\theta$ 為有理數。

10. 將一片半徑為 R 的圓形紙盤剪去一片頂點在圓心的扇形後，再將其缺角之兩邊黏起形成一個圓錐形紙杯。試問該紙杯最大可能的容積為何？以 R 表示之。備註：若某圓錐體底面圓之半徑為 r 且高度為 h ，則其體積為 $\frac{\pi r^2 h}{3}$ 。

11. 四個變數 a, b, c, d 的取值都是 0 或 1。函數

$$f(a, b, c, d) = x_1 ab + x_2 ac + x_3 ad + x_4 bc + x_5 bd + x_6 cd + x_7 a + x_8 b + x_9 c + x_{10} d$$

是由 a, b, c, d 的二次式及一次式所組成，其中 x_1, x_2, \dots, x_{10} 是常數。請問是否存在一組係數 x_1, x_2, \dots, x_{10} 使得 $f(a, b, c, ab) = abc$ 且 $f(a, b, c, d) \geq abc$ 呢？若存在，請試著找出一組；若不存在，請說明為什麼不存在。