國立成功大學應用數學研究所九十四學年度碩士班入學考

考試科目：數值分析

1. (i) 在不使用計算機的情形下，請計算 $\sqrt[5]{33}$ 到小數點後第四位，並且估計你所提供的逼近值與真實值之間的誤差【註：需說明理由】。15%

   (ii) 若將 2.0125 當成 $\sqrt[5]{33}$ 的真實值並將 2.01 當成逼近值，請問逼近值與真實值之間的絕對誤差(absolute error)是多少？相對誤差(relative error)又是多少？5%

   (iii)延續 1.(ii)，請說明逼近值 2.01 總共有幾位有效數字(significants)，並且說明有效數字(significants)與相對誤差(relative error)之間的關係。5%

2. 給一方程式 $4x-x^3=0$。顯然，此方程式有三個相異實根，分別是 ± 2 及 0。

   (i) 現在考慮如下之固定點迭代法 (fixed point iteration)：

$$\begin{cases} \text{Given } x_0 \in \mathbb{R}, \\ x_{k+1} = \dfrac{1}{4}x_k^3, \text{ for } k=0,1,2,\ldots \end{cases}$$

   請說明當 $x_0 \neq \pm 2$ 時，± 2 必爲上述迭代法之不穩定(unstable) 固定點，即 $\lim_{k\to\infty} x_k$ 必定遠離 ± 2。另外，當 $-2 < x_0 < 2$ 時，0 必爲上述迭代法之穩定(stable) 固定點，即 $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$。15%

   (ii) 請設計一固定點迭代法求解方程式 $4x-x^3=0$ 的非零根，即設計一固定點迭代法使得 ± 2 爲此迭代法的穩定固定點【註：需說明理由】。15%

3. (i) 證明瑕積分 (improper integral) $I=\int_1^\infty x^{-\frac{3}{2}}\sin\frac{1}{x}\,dx$ 存在。10%

   (ii) 給一個計算方法求瑕積分 I 的數值積分(numerical integration)，記作 $\hat{I}$，並且使得依此一計算方法所得之數值積分 $\hat{I}$ 可以任意接近瑕積分 I，即：for any $\varepsilon > 0$，there is an $\hat{I}$ such that $\left|I-\hat{I}\right| < \varepsilon$, which $\hat{I}$ is obtained by the numerical method you proposed. 15%

4. 一個函數 $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ 的條件數(condition number)，記作 cond(f)，可以被定義如下：

$$\operatorname{cond}(f)=\sup_{x\neq 0}\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{|f(x+\Delta x)-f(x)|}{|f(x)|}}{\dfrac{|\Delta x|}{|x|}}\right)$$

(i) 假設函數 $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ 可微分(differentiable)，證明 $\operatorname{cond}(f)=\sup_{x}\left|\frac{f'(x)}{f(x)}x\right|$。5%

(ii) 推廣這個定義至高維度的情形(higher dimensional case)，請證明線性函數 $f:\mathbb{R}^n\mapsto\mathbb{R}^n$ with $f(x)=Ax,\ A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ and $x\in\mathbb{R}^n$ 的條件數(condition number) 在 2-norm 的測度下，記作 $\operatorname{cond}_2(f)$，等於

$$\operatorname{cond}_2(f)=\|A\|_2\cdot\|A^{-1}\|_2$$

其中 $\|x\|_2=\sqrt[2]{x^T x}$，$\|A\|_2=\sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$。【註：所謂``在 2-norm 的測度下”的意思是，把上述定義中的絕對值都改成 2-norm】。15%