

1. 令 x_0, x_1, \dots, x_n 為在 $[a, b]$ 之間 $n+1$ 個相異點, y_0, y_1, \dots, y_n 為 $n+1$ 個實數。試證明存在唯一 n 次多項式 $P_n(x)$ 滿足 $P_n(x_i) = y_i, i = 0, 1, \dots, n$ 。
(10%)
2. 在一個 4 位有效位數的十進位計算系統中, $\frac{10}{3}$ 的浮點表示式是 $fl(\frac{10}{3}) = 0.3333 \times 10^1$ 。
- (1) 何謂 unit of round-off? 這個計算系統的 unit of round-off 又是多少?
(5%)
 - (2) 在這個計算系統中, $\frac{10}{3}$ 與 $fl(\frac{10}{3})$ 的絕對誤差是多少, 相對誤差又是多少?
(5%)
 - (3) 以這個計算系統而言, 試舉例使得

$$(x + y) + z \neq x + (y + z). \quad (10\%)$$

3. (1) 何謂 *Newton's method*? (10%)
- (2) 令函數 f 在 $[a, b]$ 之間為二階可微, 且 $f''(x)$ 有界, $x \in [a, b]$ 。假設 f 在 $[a, b]$ 之間有一根 x^* 且 $f'(x) \neq 0, \forall x \in [a, b]$ 。試證數列 $\{x_k\}$ 二階收斂到 x^* , 當初始值 x_0 足夠靠近 x^* , 其中數列 $\{x_k\}$ 由 *Newton's method* 所衍生。
(10%)
4. (1) 何謂 *LU* 分解? (5%)
- (2) 對方陣 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 試給一充分條件使得矩陣 A 之 *LU* 分解存在。(5%)
- (3) 若 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 可逆且其 *LU* 分解存在。試證其 *LU* 分解必為唯一。
(5%)
- (4) 何謂高斯消去法? (5%)
- (5) 請以高斯消去法求解線性系統 $Ax = b$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -3 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 15 \\ 8 \\ 13 \end{pmatrix}. \quad (10\%)$$

5. 令函數 f 在 x_0 可微。
- (1) 請以中間差分法 (*Central difference*) 求數值微分 $f'(x_0)$ 。 (5%)
 - (2) 試說明這個數值微分是不穩定的。 (5%)
- (提示: 考慮 $f(x+h) = \tilde{f}(x_0+h) + e(x_0+h)$, 其中

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x_0+h) &= fl(f(x_0+h)), \\ e(x_0+h) &= \text{the error term.} \end{aligned}$$

6. 假設你的計算機中沒有內設的三角函數集, 請設計一個數值方法, 求圓週率 π 。
(10%)