

學系：_____學號：_____姓名：_____

注意：禁止使用計算器。

問題	1: 10分	2: 10分	3: 10分	4: 10分	5: 10分	總分: 100分
得分						
問題	6: 10分	7: 10分	8: 10分	9: 10分	10: 10分	
得分						

1. 設 $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{如果 } x \text{ 為有理數} \\ 1, & \text{如果 } x \text{ 為無理數} \end{cases}$ 和 $g(x) = \begin{cases} 0, & \text{如果 } x \text{ 為有理數} \\ x, & \text{如果 } x \text{ 為無理數} \end{cases}$,
求 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ 。

2. 設 f 為可微的函數且 $f'(c) = 3$, 求 $f'(-c)$ 如果

(a) f 為奇函數

(b) f 為偶函數

3. 對於所有實數 x , 求 $|\sin x + \cos x + \tan x + \cot x + \sec x + \csc x|$ 的最小值。

4. 證明所有有三個相異實根的三次函數，存在一個反曲點且該點 x 的坐標為三個根的平均值。

5. 設 $F(x) = \int_0^{x^2} \sin \theta^2 d\theta$ ，求 $F'(x)$ 。

6. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\cos \frac{1}{n})^n$ 。

7. 判斷下列瑕積分收斂或發散：

$$\int_e^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$$

8. 求曲線 $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ 在 $-1 \leq x \leq 1$ 之間的弧長。

9. 令 $F(x) = \int_0^x \frac{t}{1+t^2} dt$,

(a) 找一點 a 使得 $F(a) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+2}$ 。

(b) 求 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+2}$ 之值。

10. 設曲線 C 的極座標方程式為 $r = 2 \sin \theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, 求 C 所圍區域繞 x -軸旋轉所得旋轉體的體積。

學系：_____ 學號：_____ 姓名：_____

注意：禁止使用計算器。

問題	1: 10分	2: 10分	3: 10分	4: 10分	5: 10分	總分: 100分
得分						
問題	6: 10分	7: 10分	8: 10分	9: 10分	10: 10分	
得分						

1. 設 $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{如果 } x \text{ 為有理數} \\ 1, & \text{如果 } x \text{ 為無理數} \end{cases}$ 和 $g(x) = \begin{cases} 0, & \text{如果 } x \text{ 為有理數} \\ x, & \text{如果 } x \text{ 為無理數} \end{cases}$,
求 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ 。 不存在; 0

解答: $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{如果 } x \text{ 為有理數} \\ 1, & \text{如果 } x \text{ 為無理數} \end{cases}$
 $g(x) = \begin{cases} 0, & \text{如果 } x \text{ 為有理數} \\ x, & \text{如果 } x \text{ 為無理數} \end{cases}$

不論 x 多接近 0，仍會有無限多個有理數和無理數，所以 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在。

當 x 接近 0，函數的二個部份都接近 0，所以 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ 。 \square

2. 設 f 為可微的函數且 $f'(c) = 3$ ，求 $f'(-c)$ 如果

(a) f 為奇函數 3

(b) f 為偶函數 -3

解答: (a) 如果 $f'(c) = 3$ 和 f 為奇函數，則 f' 為偶函數，那麼 $f'(-c) = f'(c) = 3$ 。

(b) 如果 $f'(c) = 3$ 和 f 為偶函數，則 f' 為奇函數，那麼 $f'(-c) = -f'(c) = -3$ 。 \square

3. 對於所有實數 x ，求 $|\sin x + \cos x + \tan x + \cot x + \sec x + \csc x|$ 的最小值。 $2\sqrt{2} - 1$

解答: 末四項可以改寫成

$$\begin{aligned} \tan x + \cot x + \sec x + \csc x &= \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x} \\ &= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x + \sin x + \cos x}{\sin x \cos x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1 + \sin x + \cos x}{\sin x \cos x} \left(\frac{\sin x + \cos x - 1}{\sin x + \cos x - 1} \right) \\
&= \frac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{\sin x \cos x (\sin x + \cos x - 1)} \\
&= \frac{2 \sin x \cos x}{\sin x \cos x (\sin x + \cos x - 1)} \\
&= \frac{2}{\sin x + \cos x - 1}
\end{aligned}$$

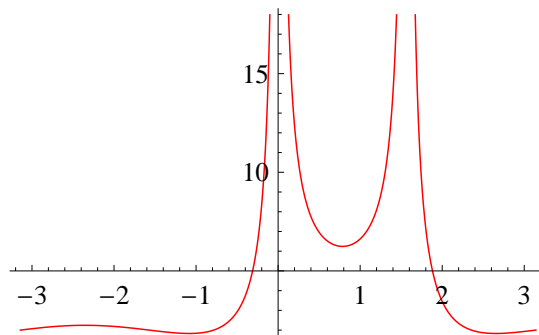
令 $t = \sin x + \cos x - 1$ ，則絕對值內的表達式為

$$\begin{aligned}
f(t) &= \sin x + \cos x + \frac{2}{\sin x + \cos x - 1} \\
&= (\sin x + \cos x - 1) + 1 + \frac{2}{\sin x + \cos x - 1} = t + 1 + \frac{2}{t}
\end{aligned}$$

因為 $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x + \cos x)$ ，
 $\sin x + \cos x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ 和 $t = \sin x + \cos x - 1 \in [-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}]$ 。

$$\begin{aligned}
f'(t) &= 1 - \frac{2}{t^2} = \frac{t^2 - 2}{t^2} = \frac{(t + \sqrt{2})(t - \sqrt{2})}{t^2} \\
f(-1 + \sqrt{2}) &= -1 + \sqrt{2} + 1 + \frac{2}{-1 + \sqrt{2}} \\
&= \sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{2} - 1} \\
&= \frac{4 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} \left(\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1} \right) = 2 + 3\sqrt{2}
\end{aligned}$$

對於 $t > 0$ ， f 是遞減，而且 $f(t) > f(-1 + \sqrt{2}) = 2 + 3\sqrt{2}$ 。對於 $t < 0$ ， f 在 $(-\sqrt{2} - 1, -\sqrt{2})$ 為遞增，在 $(-\sqrt{2}, 0)$ 為遞減。所以 $f(t) < f(-\sqrt{2}) = 1 - 2\sqrt{2}$ 。最後， $|f(t)| \geq 2\sqrt{2} - 1$ 。如下圖：□



【註】 或用算幾不等式可得

$$t + \frac{2}{t} \geq 2\sqrt{2} \quad \text{當 } t > 0$$

$$t + \frac{2}{t} \leq -2\sqrt{2} \quad \text{當 } t < 0$$

4. 證明所有有三個相異實根的三次函數，存在一個反曲點且該點 x 的坐標為三個根的平均值。

解答：設 f 的根都是實數，將函數展開成 $f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)$ 其中 r_1, r_2 和 r_3 為 f 的相異根。從有三個因式的函數的乘法原理，會有

$$\begin{aligned} f'(x) &= a[(x - r_1)(x - r_2) + (x - r_1)(x - r_3) + (x - r_2)(x - r_3)] \\ f''(x) &= a[(x - r_1) + (x - r_2) + (x - r_1) + (x - r_3) + (x - r_2) + (x - r_3)] \\ &= a[6x - 2(r_1 + r_2 + r_3)] \end{aligned}$$

當 $x = \frac{r_1 + r_2 + r_3}{3} = (r_1, r_2 \text{ 和 } r_3 \text{ 的平均})$ 時，則 $f''(x) = 0$ 。最後當 $x < \frac{r_1 + r_2 + r_3}{3}$ 和當 $x > \frac{r_1 + r_2 + r_3}{3}$ 時 $f''(x)$ 為異號，亦即函數的圖形在 $\frac{r_1 + r_2 + r_3}{3}$ 的兩側為一凸和一凹，因此 $(\frac{r_1 + r_2 + r_3}{3}, f(\frac{r_1 + r_2 + r_3}{3}))$ 為反曲點。□

5. 設 $F(x) = \int_0^{x^2} \sin \theta^2 d\theta$ ，求 $F'(x)$ 。 2x sin x^4

解答：使用來布尼茲積分法則：設 $F(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, t) dt$ 是可微函數，則

$$\begin{aligned} F'(x) &= f(x, b(x))b'(x) - f(x, a(x))a'(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) dt \\ &= \sin(x^2)^2 (2x) = 2x \sin x^4 \end{aligned} \quad \square$$

6. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\cos \frac{1}{n})^n$ 。 1

解答：令 $y = f(x) = (\cos x)^{\frac{1}{x}}$, $x \geq 0$ ，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\cos \frac{1}{n})^n = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ 。

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \cos x}{x} && \text{(分子分母同時趨近 0)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin x}{\cos x} && \text{(羅必達法則)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

所以 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = e^0 = 1$ 。 □

7. 判斷下列瑕積分收斂或發散：

收斂

$$\int_e^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$$

解答：(下列第一式分子分母同時趨近 ∞) 用羅必達法則得

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)'}{(\sqrt{x})'} = \lim_{x \rightarrow \infty} 2 \frac{\sqrt{x}}{x} = 0$$

又

$$\int_M^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx \leq \int_M^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2} dx \quad \text{當 } M \text{ 夠大}$$

$$\int_M^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx = \int_M^{\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} dx \text{ 收斂，所以 } \int_e^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx \text{ 也收斂。} \quad \square$$

8. 求曲線 $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ 在 $-1 \leq x \leq 1$ 之間的弧長。

$e - e^{-1}$

解答：令 $x = t$ 及 $y(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ ，則

$$\begin{aligned} \text{弧長} &= \int_{-1}^1 \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \\ &= \int_{-1}^1 \sqrt{1 + \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2} dt \\ &= \int_{-1}^1 \sqrt{\left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2} dt \\ &= \int_{-1}^1 \frac{e^t + e^{-t}}{2} dt \\ &= \frac{e^t - e^{-t}}{2} \Big|_{t=-1}^{t=1} = e - e^{-1} \quad \square \end{aligned}$$

9. 令 $F(x) = \int_0^x \frac{t}{1+t^2} dt$ ，

(a) 找一點 a 使得 $F(a) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+2}$ 。

1 或 -1

(b) 求 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+2}$ 之值。

$\frac{1}{2} \ln 2$

解答：

(a) 因為 $\frac{t}{1+t^2} = t \sum_{k=0}^{\infty} (-t^2)^k$,

$$F(x) = \int_0^x \frac{t}{1+t^2} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int t(-t^2)^k dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+2} x^{2k+2}$$

所以

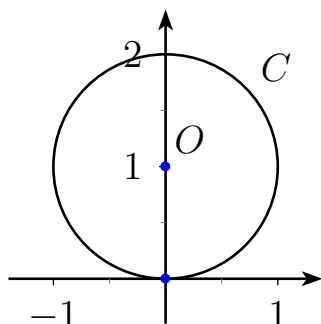
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+2} = F(1) \text{ 或 } F(-1)$$

(b)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+2} = F(1) = \int_0^1 \frac{t}{1+t^2} dt = \frac{1}{2} \ln(1+t^2) \Big|_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{2} \ln 2 \quad \square$$

10. 設曲線 C 的極座標方程式為 $r = 2 \sin \theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, 求 C 所圍區域繞 x -軸旋轉所得旋轉體的體積。 $2\pi^2$

解答: 【解法一】 由 $r = 2 \sin \theta$, 可得 $r^2 = 2r \sin \theta$, 亦即 $x^2 + y^2 = 2y$, 如下圖:



前式可表為 $x^2 + (y-1)^2 = 1$ 或 $y = 1 \pm \sqrt{1-x^2}$, 所得旋轉體體積為

$$\pi \int_{-1}^1 \left(1 + \sqrt{1-x^2}\right)^2 - \left(1 - \sqrt{1-x^2}\right)^2 dx = 4\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

令 $x = \sin u$, 則有

$$\begin{aligned} 4\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 u} \cos u du &= 4\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u du \\ &= 4\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2u}{2} du \\ &= 2\pi^2 \end{aligned}$$

【解法二】 曲線 C 為一圓，其面積是 $A = \pi$ 、圓心是 $(0, 1)$ ，繞 x -軸旋轉一圈其周長為 $2\pi r = 2\pi$ ，由 Theorem of Pappus 得旋轉體體積為 $A \times (2\pi r) = \pi \times (2\pi) = 2\pi^2$ 。 \square