

學系：_____ 學號：_____ 姓名：_____

注意：禁止使用計算器。

問題	1: 10分	2: 10分	3: 10分	4: 10分	5: 10分	總分: 100分
得分						
問題	6: 10分	7: 10分	8: 10分	9: 10分	10: 10分	
得分						

1. 計算 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - x}{x^3 - 3x^2}$ 。

 答案： $-\frac{5}{54}$

解答：

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - x}{x^3 - 3x^2} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+6} - x)(\sqrt{x+6} + x)}{(x^3 - 3x^2)(\sqrt{x+6} + x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x + 6 - x^2}{(x^3 - 3x^2)(\sqrt{x+6} + x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-(x-3)(x+2)}{x^2(x-3)(\sqrt{x+6} + x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-(x+2)}{x^2(\sqrt{x+6} + x)} \\
 &= -\frac{5}{9(3+3)} = -\frac{5}{54} \quad \square
 \end{aligned}$$

 2. 已知橢圓方程式 $x^2 + 2y^2 = 1$ ，試求出橢圓上切線斜率為 1 的點。 答

案： $\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ 及 $\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$

 解答：已知 $x^2 + 2y^2 = 1 \Rightarrow 2x + 4yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{2y} = 1 \Rightarrow x = -2y$ 。
 因為所求的點落在橢圓上，所以我們有 $(-2y)^2 + 2y^2 = 1 \Rightarrow 6y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}$ ，因此所求點為 $\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ 及 $\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ 。 \square

 3. 試證多項式 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - a^2x + b$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ ，在閉區間 $[0, 1]$ 上最多只有一個零根。

 解答：因為 $f(x)$ 在區間 $[0, 1]$ 是連續且可微，由 Rolle's 定理可得若 $f(x) = 0$ 在區間 $[0, 1]$ 有兩個解，則存在 $c \in (0, 1)$ 使得 $f'(c) = 0$ 。對原函數作微分可得

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - a^2 = 6 \left(x^2 - x - \frac{a^2}{6} \right)$$

$$= 6 \left[\left(x - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} - \frac{a^2}{6} \right];$$

$$f'(x) = 0 \leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{a^2}{6} \geq \left(\frac{1}{2} \right)^2 \leftrightarrow \left| x - \frac{1}{2} \right| \geq \frac{1}{2},$$

若 $f'(x^*) = 0$ ，因為 x^* 到 $\frac{1}{2}$ 最短距離至少要 $\frac{1}{2}$ ，因此 $x^* \notin (0, 1)$ ，所以 $f(x) = 0$ 在區間 $[0, 1]$ 最多有一個解。 \square

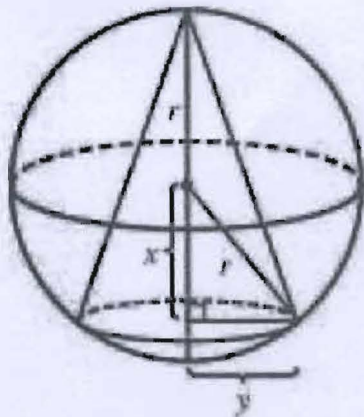
4. 試求在一個半徑為 r 的球內，內接圓錐的最大體積。 答案： $\frac{32\pi r^3}{81}$

解答：如下圖 $y^2 = r^2 - x^2$ ，圓錐的體積為

$$V = \frac{1}{3}\pi y^2(r+x) = \frac{1}{3}\pi(r^2 - x^2)(r+x), \quad -r \leq x \leq r$$

因為 $V'(x) = \frac{\pi}{3} [(r^2 - x^2)(1) + (r+x)(-2x)] = \frac{\pi}{3}(r+x)(r-3x)$ ，當 $x = -r$ 或 $x = \frac{r}{3}$ 時 $V'(x) = 0$ 成立。

當 x 為兩端點時，其體積 $V(r) = 0 = V(-r)$ ，所以體積最大值發生在 $x = \frac{r}{3}$ ，且體積為 $V\left(\frac{r}{3}\right) = \frac{\pi}{3} \left(r^2 - \frac{r^2}{9} \right) \left(\frac{4r}{3} \right) = \frac{32\pi r^3}{81}$ 。 \square



5. 試求使得曲線 $y(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t+t^2} dt$ 為嚴格凹向上之 x 的範圍。 答案： $x \in (-\infty, -1/2)$

解答：對於曲線凹向上的情況，我們必定有 $y'' > 0$ 。

$y = \int_0^x \frac{1}{1+t+t^2} dt \Rightarrow y' = \frac{1}{1+x+x^2} \Rightarrow y'' = \frac{-(1+2x)}{(1+x+x^2)^2}$ 。因為對所有 x ，我們有 $(1+x+x^2)^2 > 0$ ，因此要使得 $y'' > 0$ ，我們可得 $(1+2x) < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2}$ 。所以曲線嚴格凹向上的範圍在 $(-\infty, -1/2)$ 。 \square

6. 試找出函數 f 及實數 a 使得 答案： $f(x) = x^{3/2}$, $a = 9$

$$6 + \int_a^x \frac{f(t)}{t^2} dt = 2\sqrt{x}, \quad \text{對所有的 } x > 0$$

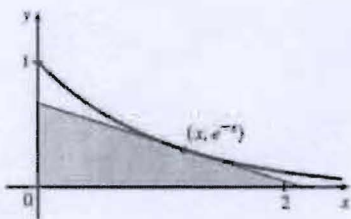
解答：利用微積分第一基本定理，將等號兩邊同時微分可得 $\frac{f(x)}{x^2} = 2 \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f(x) = x^{3/2}$ 。爲了求出 a ，我們將 $x = a$ 代回原式可得 $6 + \int_a^a \frac{f(t)}{t^2} dt = 2\sqrt{a} \Rightarrow 6 + 0 = 2\sqrt{a} \Rightarrow a = 9$ 。 □

7. 試求曲線 $y = x$ 及 $y = x^2$ 在 $x \in [0, 1]$ 所圍的區域對直線 $y = 2$ 作旋轉的旋轉體積。 答案： $\frac{8}{15}\pi$

解答：由圓盤法得曲線所構成橫切面爲一墊圈，小圓半徑爲 $2 - x$ ，大圓半徑爲 $2 - x^2$ ，因此

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \pi [(2 - x^2)^2 - (2 - x)^2] dx \\ &= \int_0^1 \pi (x^4 - 5x^2 + 4x) dx \\ &= \pi \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 2x^2 \right]_0^1 \\ &= \pi \left[\frac{1}{5} - \frac{5}{3} + 2 \right] = \frac{8}{15}\pi \end{aligned} \quad \square$$

8. 試問在第一象限中，三角形以 x 和 y 軸爲兩邊，第三邊與 $y = e^{-x}$ 相切的
的最大面積是多少？ 答案： $2/e$



解答：當我們找出 $y = e^{-x}$ 的切線後，就能找出此切線與兩軸的交點，因此三角形面積即可求出。在點 (a, e^{-a}) 的切線斜率爲 $\frac{d}{dx} e^{-x} \Big|_{x=a} = -e^{-a}$ ，因此切線爲 $y - e^{-a} = -e^{-a}(x - a) \Leftrightarrow y = e^{-a}(a - x + 1)$ 。因此與 y 軸截距爲 $y = e^{-a}(a - 0 + 1) = e^{-a}(a + 1)$ 。爲了找出 x 軸截距，我們令 $y = 0 \Rightarrow e^{-a}(a - x + 1) = 0 \Rightarrow x = a + 1$ ，因此三角形面積爲 $A(a) = \frac{1}{2}[e^{-a}(a + 1)](a + 1) = \frac{1}{2}e^{-a}(a + 1)^2$ 。

將此式對 a 微分： $A'(a) = \frac{1}{2}[e^{-a}(2)(a + 1) + (a + 1)^2 e^{-a}(-1)] = \frac{1}{2}e^{-a}(1 - a^2)$ ，在 $a = \pm 1$ 時，微分值爲 0 且由一階導數檢測法可

知 $a = 1$ 時有最大值。所以三角形面積的最大值為 $A(1) = \frac{1}{2}e^{-1}(1+1)^2 = 2e^{-1} = 2/e$ 。 \square

9. 計算 $\int_1^{\infty} \frac{\tan^{-1} x}{x^2} dx$ ，其中 $\tan^{-1} x$ 為 $\tan x$ 的反函數。 答

案： $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{1}{4}(\pi + \log(4))$

解答： $\int_1^{\infty} \frac{\tan^{-1} x}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{\tan^{-1} x}{x^2} dx$ ，使用分部積分：

$$\begin{aligned} \int \frac{\tan^{-1} x}{x^2} dx &= -\frac{\tan^{-1} x}{x} + \int \frac{1}{x(1+x^2)} dx \\ &= -\frac{\tan^{-1} x}{x} + \int \left[\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} \right] dx \\ &= -\frac{\tan^{-1} x}{x} + \ln|x| - \frac{1}{2} \ln x^2 + 1 + C \\ &= -\frac{\tan^{-1} x}{x} + \frac{1}{2} \frac{x^2}{x^2+1} + C \end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{\tan^{-1} x}{x^2} dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-\frac{\tan^{-1} x}{x} + \frac{1}{2} \ln \frac{x^2}{x^2+1} \right]_1^t \\ &= 0 + \frac{1}{2} \ln 1 + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2 \quad \square \end{aligned}$$

10. 設 $f(x) = (x-1)^7 e^x$ ，試求 $f^{(20)}(1)$ 。 答案： $\frac{e(20!)}{13!}$

解答：

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(1)}{n!} (x-1)^n \\ e^x &= e e^{(x-1)} = e \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-1)^k}{k!} \end{aligned}$$

則

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e(x-1)^{k+7}}{k!} = \sum_{n=7}^{\infty} \frac{e(x-1)^n}{(n-7)!}$$

因為 $f(x)$ 在 $x=1$ 的展開式是唯一的，因此

$$\frac{f^{(20)}(1)}{20!} = \frac{e}{13!} \Rightarrow f^{(20)}(1) = \frac{e(20!)}{13!} \quad \square$$