學系：____________ 學號：____________ 姓名：____________

注意：禁止使用計算器。

問題	1: 10分	2: 10分	3: 10分	4: 10分	5: 10分	總分: 100分
得分						
問題	6: 10分	7: 10分	8: 10分	9: 10分	10: 10分	
得分						

1. 設 $xy + x - y + 1 = 0$，請找出 $\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}$ 在點 $(2, -3)$ 的值。 答案: 12

解答: 因爲$y = \frac{1+x}{1-x} = \frac{-1+x+2}{1-x} = -1 + \frac{2}{1-x}$，則$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2}{(1-x)^2}$，$\frac{\mathrm{d}^2y}{dx^2} = \frac{4}{(1-x)^3}$，$\frac{\mathrm{d}^3y}{dx^3} = \frac{12}{(1-x)^4}$。所以$\left.\frac{\mathrm{d}^3y}{dx^3}\right|_{x=2} = 12$。 □

2. 若曲線 γ 的方程式爲 $y = x^3 - 3x^2 + 2$，請問在曲線上哪個點的切線方程式 l 會跟直線 $y = 9x + 4$ 平行？ 答案: $(-1, -2), (3, 2)$

解答: 先對曲線γ作微分，可得$y' = 3x^2 - 6x$。因爲題目所給直線的斜率爲9，所以對切線方程式l來說，可在曲線γ上找到一點(x_0, y_0)，斜率也爲9。所以可得

$$\begin{aligned} 3x_0^2 - 6x_0 &= 9 \\ 3(x_0^2 - 2x_0 - 3) &= 0 \\ 3(x_0 - 3)(x_0 + 1) &= 0 \\ x_0 &= 3, -1 \end{aligned}$$

因爲(x_0, y_0)在曲線γ上，所以$y_0 = x_0^3 - 3x_0^2 + 2$，

(i) 若$x_0 = -1$，則$y_0 = -2$。

(ii) 若$x_0 = 3$，則$y_0 = 2$。

由此可知在曲線γ上$(-1, -2), (3, 2)$兩點的切線方程式會平行直線$y = 9x + 4$。 □

3. 計算 $\int \ln(x^2 + 1)\, \mathrm{d}x$。 答案: $x \ln(x^2 + 1) - 2x + 2\tan^{-1}(x) + C$

解答: 利用分部積分法，令 $u=\ln(x^2+1)$, $\mathrm{d}v=\mathrm{d}x$，則 $\mathrm{d}u=\frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x, v=x$

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= x\ln(x^2+1)-\int\frac{2x}{x^2+1}\cdot x\,\mathrm{d}x \\
&= x\ln(x^2+1)-2\int\frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \\
&= x\ln(x^2+1)-2\int 1-\frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \\
&= x\ln\left(x^2+1\right)-2x+2\tan^{-1}(x)+C
\end{aligned}$$

□

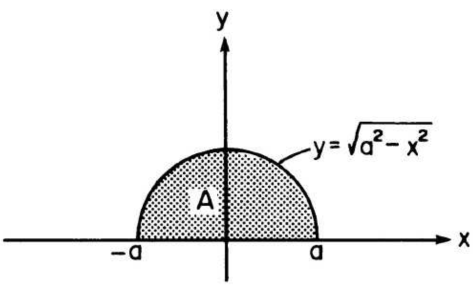
4. 計算 $\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{(x-x_0)(x_1-x)}\,\mathrm{d}x,\ x_0<x_1$。 答案: $\frac{\pi}{8}(x_1-x_0)^2$

解答: 先令$a=\frac{x_1-x_0}{2}>0$，且令$u=x-\frac{x_0+x_1}{2}$。觀察$\frac{x_0+x_1}{2}$爲積分範圍$[x_0,x_1]$的中點，a爲中點到積分範圍$[x_0,x_1]$兩端點的距離。

所以$x-x_0=u+a, x-x_1=u-a$；若$x=x_0$，則$u=-a$；若$x=x_1$，則$u=a$，由此可知變數變換之後的積分範圍爲$[-a,a]$，積分改寫爲

$$I=\int_{-a}^{a}\sqrt{(u+a)(a-u)}\,\mathrm{d}u=\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-u^2}\,\mathrm{d}u$$

此積分相當於在半圓$y=\sqrt{a^2-x^2}, -a\le x\le a$的面積$A$（如下圖）。因此$I=\frac{\pi a^2}{2}=\frac{\pi}{8}(x_1-x_0)^2$。 □

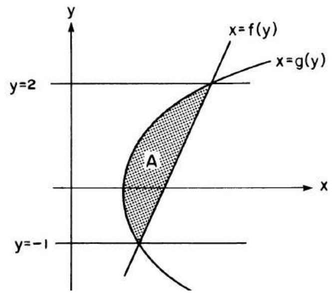


5. 設 R 爲由 $y^2=x-1$ 和 $y=x-3$ 所圍的區域，列出求下列問題之積分式 (a) R 之面積; (b) R 之周長; (c) R 對直線 $y=2$ 旋轉之旋轉體體積。(不需計算其結果) 答案: (a) $\int_{-1}^{2}[y+2-y^2]\,\mathrm{d}y$; (b) $\int_{-1}^{2}\sqrt{1+4y^2}\,\mathrm{d}y+\int_{-1}^{2}\sqrt{2}\,\mathrm{d}y$; (c) 殼法$\int_{-1}^{2}2\pi(2-y)\left(2+y-y^2\right)\,\mathrm{d}y$ 或圓盤法$\int_{1}^{2}\pi\left[8\sqrt{x-1}\right]\,\mathrm{d}x+\int_{2}^{5}\pi\left[(x-5)^2-\left(\sqrt{x-1}-2\right)^2\right]\,\mathrm{d}x$

解答: (a) 轉換方程式爲

$$y = x - 3 \Rightarrow x = f(y) = y + 3$$
$$y^2 = x - 1 \Rightarrow x = g(y) = y^2 + 1$$

如下圖。 兩曲線的交點爲



$$\begin{aligned} y + 3 &= y^2 + 1 \\ y^2 - y - 2 &= 0 \\ (y-2)(y+1) &= 0 \\ y &= 2, -1 \end{aligned}$$

由此可知兩曲線交點在$(2, -1), (5, 2)$。因此曲線包圍的的面積A爲

$$A = \int_{-1}^{2} [f(y) - g(y)] \,\mathrm{d}y = \int_{-1}^{2} [y + 2 - y^2] \,\mathrm{d}y$$

(b) R 之周長爲 $(x = g_1(y) = y^2 + 1,\ x = g_2(y) = y + 3$，交點爲 $(5, 2), (2, -1))$

$$\begin{aligned} \int \,\mathrm{d}s &= \int \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2} \,\mathrm{d}y \\ &= \int_{-1}^{2} \sqrt{1 + (2y)^2} \,\mathrm{d}y + \int_{-1}^{2} \sqrt{1 + (1)^2} \,\mathrm{d}y \\ &= \int_{-1}^{2} \sqrt{1 + 4y^2} \,\mathrm{d}y + \int_{-1}^{2} \sqrt{2} \,\mathrm{d}y \end{aligned}$$

(c) 利用殼法得體積爲(半徑$= 2 - y$)

$$\int_{-1}^{2} 2\pi(2 - y) \left[(y + 3) - (y^2 + 1)\right] \,\mathrm{d}y = \int_{-1}^{2} 2\pi(2 - y) \left(2 + y - y^2\right) \,\mathrm{d}y$$

或利用圓盤法得體積爲

$$\int_1^2 \pi\left[\left(-\sqrt{x-1}-2\right)^2-\left(\sqrt{x-1}-2\right)^2\right]\,\mathrm{d}x+\int_2^5 \pi\left[((x-3)-2)^2-\left(\sqrt{x-1}-2\right)^2\right]\,\mathrm{d}x$$
$$=\int_1^2 \pi\left[8\sqrt{x-1}\right]\,\mathrm{d}x+\int_2^5 \pi\left[(x-5)^2-\left(\sqrt{x-1}-2\right)^2\right]\,\mathrm{d}x$$

6. 設 $f(x)=(x-5)\sqrt[3]{x^2}$，求 $f(x)$ 的相對極大、相對極小和反曲點。 答案: 相對極大 $(0,0)$，相對極小 $(2,-3\sqrt[3]{4})$，反曲點 $(-1,-6)$

解答: $f'(x)=\frac{2}{3}x^{-1/3}(x-5)+x^{2/3}=\frac{1}{3}x^{-1/3}(2(x-5)+3x)=\frac{5}{3}x^{-1/3}(x-2)$ 得臨界點 $x=0,2$，但

x	<0	$=0$	$0<x<2$	$x=2$	$x>2$
$f'(x)$	>0	$=0$	<0	$=0$	>0
$f(x)$	$\uparrow$	相對極大	$\downarrow$	相對極小	$\uparrow$

所以相對極大點爲 $(0,0)$，相對極小點爲 $(2,-3\sqrt[3]{4})$。

又

$$\begin{aligned}f''(x)&=\frac{5}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-4/3}(x-2)+\frac{5}{3}x^{-1/3}\\&=-\frac{5}{9}x^{-4/3}(x-2-3x)\\&=\frac{10}{9}x^{-4/3}(x+1)\end{aligned}$$

$f''(x)=0\Rightarrow x=-1$

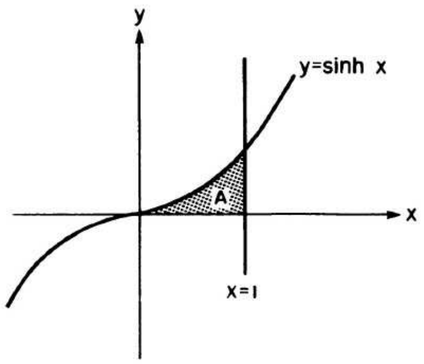
x	<-1	$=-1$	$-1<x<0$	$x=0$	$x>0$
$f''(x)$	<0	$=0$	>0	$=0$	>0
$f(x)$		反曲點		DNE	

有反曲點爲 $(-1,6)$。 □

7. 求由 x 軸、$x=1$ 和用參數表示的曲線 $x=\ln t,\ y=\frac{t-t^{-1}}{2}$ 所圍面積爲何？ 答案: $\frac{e+e^{-1}}{2}-1=\cosh 1-1$

解答: 明顯可看出$t>0$。若令$t=e^x, y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\sinh x, -\infty<x<\infty$，則面積$A$爲(如下圖)

$$A=\int_0^1 y\,\mathrm{d}x$$



方法1 (參數法)

積分範圍：$x=0 \leftrightarrow t=1,\ x=1 \leftrightarrow t=e$

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^1 y\,\mathrm{d}x = \int_1^e y(t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_1^e \left(\frac{t-t^{-1}}{2}\right)\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int_1^e [1-t^{-2}]\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}[t+t^{-1}]\Big|_{t=1}^{t=e} \\
&= \frac{e+e^{-1}}{2} - 1 = \cosh 1 - 1
\end{aligned}
$$

方法2 (代換法$y=f(x)=\sinh x$)

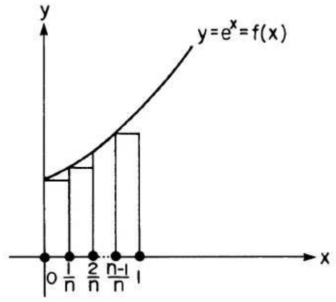
$$
A = \int_0^1 \sinh x\,\mathrm{d}x = \cosh x|_{x=0}^{x=1} = \cosh 1 - 1 \qquad \square
$$

8. 計算 $\lim_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt[n]{e}+\sqrt[n]{e^2}+\cdots+\sqrt[n]{e^{n-1}}}{n}$。 答案: $e-1$

解答:

$$
\begin{aligned}
l &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(1+e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\cdots+e^{\frac{n-1}{n}}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} e^{\frac{k}{n}}
\end{aligned}
$$

先考慮函數$f(x) = e^x$在區間$[0,1]$的圖形，若分成n個相同間隔的子區間時，則$f(\frac{k-1}{n}) = e^{\frac{k-1}{n}}$ 爲函數$f(x)$的第k個子區間的起始點之值。 令$\Delta x = \frac{1}{n}$，則



$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\Delta x\to 0)}} \sum_{k=1}^{n} f((k-1)\Delta x)\Delta x \\
&= \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 e^x\,\mathrm{d}x = e-1
\end{aligned}
$$
□

9. 若函數 f 滿足下列兩條件：$f'(x) = 1 + (f(x))^{10}$ 且 $f(0) = 1$，求 $f(x)$ 對 $x = 0$ 作泰勒展開式的前四項。 答案: $1 + 2x + 10x^2 + \frac{280}{3}x^3$

解答: 函數$f(x)$對0作泰勒展開式的3階多項式爲$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$，其中$a_0 = f(0) = 1$; $a_1 = f'(0) = 1 + 1 = 2$; $f''(x) = 10f'(x)[f(x)]^9$; $a_2 = \frac{f''(0)}{2!} = \frac{20}{2!} = 10$; $f'''(x) = 10f''(x)[f(x)]^9 + 90[f'(x)]^2[f(x)]^8$; $a_3 = \frac{f'''(0)}{3!} = \frac{10(20)+(90)(4)}{3!} = \frac{280}{3}$ 因此$P(x) = 1 + 2x + 10x^2 + \frac{280}{3}x^3$。 □

10. 計算 $\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{1}{x}}{x}$ 和 $\lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{1}{x}}{x}$。 答案: 1; $-\infty$

解答: (i) 當$x \to 0^+$, $\lim_{x\to 0^+} \tan^{-1}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$，在此種情況要使用l'Höpital'法則$\left(\text{因爲}\frac{0}{0}\right)$，則此極限爲

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{1}{x}}{x} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{1}{x}\right)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{1} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+x^2} = 1
\end{aligned}
$$

(ii) 當$x \to 0^-$, $\lim_{x\to 0^-} \tan^{-1}\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$，在此種情況此極限爲

$$
\lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{1}{x}}{x} = \frac{\pi}{0^-} = -\infty
$$
□