國立成功大學學年微積分實力測驗試題

1998 年 4 月 18 日　上午 9:20~11:00

(1) 填空：　(33%)

(a) 若 $F(x) = \int_{-x}^{x} e^{-t^2}\, dt$，則 $F'(x) = \underline{\quad (1) \quad}$.

(b) 設 $f(x) = \exp(-\frac{x^2}{2})$，則 $f(x)$ 的極值為 $\underline{\quad (2) \quad}$，反曲點為 $\underline{\quad (3) \quad}$ 和 $\underline{\quad (4) \quad}$，遞增區間為 $\underline{\quad (5) \quad}$，遞減區間為 $\underline{\quad (6) \quad}$，上凹區間為 $\underline{\quad (7) \quad}$，下凹區間為 $\underline{\quad (8) \quad}$.

(c) 已知 $f(3) = 7,\ f'(3) = 2,\ g(3) = 6,\ g'(3) = -10$，則 $(fg)'(3) = \underline{\quad (9) \quad}$.

(d) $\lim_{x \to 0^+} \frac{[\![x]\!]}{x} = \underline{\quad (10) \quad}$.（$[\![\ ]\!]$ 為高斯符號）

(e) $\lim_{x \to +\infty} x(e^{1/x} - 1) = \underline{\quad (11) \quad}$.

(f) 設 $f(x) = 3x^5 + x - 2$，若 $f(x) = 2$，$x = \underline{\quad (12) \quad}$，又 $(f^{-1})'(2) = \underline{\quad (13) \quad}$.

(g) $f(x) = x^4 + 8x^3 - 2$ 在 $[-8, 1]$ 內的最大值為 $\underline{\quad (14) \quad}$，最小值為 $\underline{\quad (15) \quad}$.

(h) 若 $f(x) = (x^2 + 1)^{\sin x}$, $f'(1) = \underline{\quad (16) \quad}$.

(2) 試求下列積分　(18%)

(a) $\int \frac{x \cdot 3^{x^2}}{3^{x^2} - 2}\, dx.$

(b) $\int_{-\pi}^{\pi} \left(x^3\sqrt{x^2+1} + |\cos x|\right) dx.$

(c) $\int_0^1 x \ln x\, dx.$

(3) 試求下列極限　(15%)

(a) $\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right).$

(b) $\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{6}{n} i\right) \frac{3}{n}.$

(c) $\lim_{n \to +\infty} \frac{e^{1/n} + e^{2/n} + \cdots + e^{n/n}}{n}.$

(4) (a) 設 $f(x) = \begin{cases} 2ax + b, & \text{若 } x \le 1, \\ x^2, & \text{若 } x > 1, \end{cases}$ 試求 a, b 之值使得 $f(x)$ 為一可微函數.　(5%)

(b) 請說明瑕積分 $\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$ 與 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$ 的收斂性.　(10%)

(5) (a) 設函數 $f(x)$ 在區間 $[a, b]$ 內連續，利用均值定理證明： (9%)

(i) $\forall\, x \in (a, b),\ f'(x) > 0 \Rightarrow f$ 在 $[a, b]$ 內為遞增函數 .

(ii) $\forall\, x \in (a, b),\ f'(x) < 0 \Rightarrow f$ 在 $[a, b]$ 內為遞減函數 .

(iii) $\forall\, x \in (a, b),\ f'(x) = 0 \Rightarrow f$ 在 $[a, b]$ 內為常數函數 .

(b) 令 $R = \{(x, y) \big| \, 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq \dfrac{1}{x^2+1}\}$，則 R 的面積為何？

R 繞著直線 $x = 10$ 旋轉所得的旋轉體體積為何？ (10%)