

# 國立成功大學 84 學年微積分實力測驗試題

1996.4.20. 13:30 ~ 15:10

本試題中的函數  $f(x)$ ，皆指函數  $f(x) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$ ， $x \neq 0$

提示： $\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{d}{dx}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$ ； $\frac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = \frac{d}{dx}(\operatorname{arccot} x) = -\frac{1}{1+x^2}$ .

(1) 試求：(a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = ?$  (b)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = ?$  (c)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = ?$  (d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = ?$

(2) (a) 試證： $f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$ .

(b) 是否可由 (a) 之結果而斷言：

“存在一常數  $C$ ，使得對任意  $x \neq 0$ ， $f(x) = \cot^{-1} x + C$ ”。

試說明其理由。

(c) 是否存在一數  $p \in (-1, 1)$  使得  $f'(p) = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)}$ ？若存在此數  $p$ ，則

求之。若不存在此數  $p$ ，是否有違微分均值定理？為何？

(d) 試求： $f''(x) = ?$  及  $f'''(x) = ?$

(3) 試討論並列表以繪製  $f(x)$  之圖形。

(4) 試求：(a)  $\int \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) dx = ?$  (b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x \tan^{-1}\left(\frac{1}{t}\right) dt}{\ln x} = ?$

(5) (a) 試求  $f(x)$  之圖形在第一象限與  $x = 0$ ， $x = 1$  及  $y = 0$  所圍成的區域  $R$  繞  $Y$  軸迴轉所得立體  $S$  之體積  $V(S)$ 。

(b) 試求  $f$  在點  $x = 1$  之二次 Taylor 多項式。

$$P_2(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 = ?$$

(c) 當以  $P_2(\sqrt{3})$  做為  $f(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{6}$  之近似值時，不等式  $|f(\sqrt{3}) - P_2(\sqrt{3})| < E$  中之  $E$ ，可以多小？（越小越好）。

[提示：求當  $c \in [1, \sqrt{3}]$  時， $\left| \frac{f'''(c)}{3!}(\sqrt{3}-1)^3 \right|$  之最大值。]