

# 國立成功大學 103 學年度 微積分競試

2015 年 4 月 25 日

姓名：\_\_\_\_\_ 學號：\_\_\_\_\_ 學系：\_\_\_\_\_

說明：

1. 本試題含封面共 9 頁，8 大題。
2. 考試時間 100 分鐘。
3. 請在每個試題所屬的頁面作答。如欲使用試題背面，請標示清楚。
4. 如果題目附有答案欄，請將答案寫在答案欄上。
5. 清楚地寫出計算及證明的過程，沒有過程的答案將不予記分。

題號	配分	分數
1	10	
2	15	
3	10	
4	20	
5	15	
6	10	
7	10	
8	10	
總分	100	

1. 計算下列積分

(a) (5 points)

$$\int_1^2 \ln x \, dx =$$

(a) \_\_\_\_\_

(b) (5 points)

$$\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}} =$$

(b) \_\_\_\_\_

2. 令

$$F(\theta) = \frac{1}{\frac{1}{2} \sin \theta + \cos \theta}, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

(a) (5 points) 求  $F(\theta)$  的臨界點 (critical point)  $\hat{\theta}$ , 即  $F'(\theta) = 0$  的解。

(a) \_\_\_\_\_

(b) (5 points) 求  $F(\theta)$  在  $(0, \frac{\pi}{2})$  的相對極值 (relative/local extreme values) 並說明原因。

(b) \_\_\_\_\_

(c) (5 points) 求  $F(\theta)$  在  $[0, \frac{\pi}{2}]$  的絕對極值 (absolute extreme values)。

(c) \_\_\_\_\_

3. 令  $S$  為  $y = \sin x$ ,  $x = \frac{\pi}{2}$ , 及  $y = 0$  所圍成的區域。

(a) (5 points) 求  $S$  對  $x$  軸旋轉的旋轉體體積。

(a) \_\_\_\_\_

(b) (5 points) 求  $S$  對  $y$  軸旋轉的旋轉體體積。

(b) \_\_\_\_\_

4. 令

$$F(x) = \int_0^x 3^t dt.$$

(a) (5 points) 證明  $F(x)$  為絕對遞增 (strictly increasing) 函數。

(b) (5 points) 求不定積分

$$\int 3^t dt =$$

(b) \_\_\_\_\_

(c) (5 points) 求  $F^{-1}(\frac{2}{\ln 3})$ ，即求  $F(x) = \frac{2}{\ln 3}$  的解。

(c) \_\_\_\_\_

(d) (5 points) 求  $(F^{-1})'(\frac{2}{\ln 3})$ 。

提示：利用連鎖律  $F'(F^{-1}(x)) \cdot (F^{-1})'(x) = 1$ ，並將  $x = \frac{2}{\ln 3}$  代入此等式。

(d) \_\_\_\_\_

5. 令

$$f(x) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right), \quad -1 < x < 1.$$

(a) (5 points) 求  $f'(x)$ 。

(a) \_\_\_\_\_

(b) (5 points) 求  $f'(x)$  在  $x = 0$  的泰勒級數 (Taylor series)。

(b) \_\_\_\_\_

(c) (5 points) 求  $f(x)$  在  $x = 0$  的泰勒級數 (Taylor series)。

(c) \_\_\_\_\_

6. (10 points) 判斷下列級數是否收斂並說明理由。

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

提示：計算瑕積分 (improper integral)

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x}$$

7. (10 points) 證明對所有實數  $x > y > 0$ ，下列不等式恆成立。

$$\sqrt{1+x} - \sqrt{1+y} < \frac{1}{2}(x-y)$$



8. 令

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{if } x \neq 0, \\ 0 & \text{if } x = 0. \end{cases}$$

(a) (3 points) 判斷  $f(x)$  是否在  $x = 0$  連續並說明原因。

(b) (7 points) 判斷  $f(x)$  是否在  $x = 0$  可微分並說明原因。  
提示：利用 L'Hospital's rule。