

學號:

姓名:

甲、多重選擇題 (多選 6 題, 每題 5 分, 共 30 分, 不需要寫計算過程, 答錯一個選項扣兩分, 分數不倒扣)

1. 以下極限何者答案為 1?

(A) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x}$ (B) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec x - 1}{x}$ (C) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x}{x^2}$ (D) $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-x^2}$

(E) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x$

答:

2. 以下何者為 $y = \frac{x+2}{\sqrt{x^2-9}}$ 函數圖形的漸近線?

(A) $x = 3$ (B) $x = -3$ (C) $x = -2$ (D) $y = 1$ (E) $y = 0$

答:

3. 以下何者為處處都可微分的函數?

(A) $f(x) = |x|$ (B) $f(x) = \sqrt[3]{1 + e^{\cos x}}$ (C) $f(x) = \int_0^{\cos x} t \arcsin t dt$

(D) $f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{if } x \leq 1 \\ 3x - 2, & \text{if } x > 1 \end{cases}$ (E) $f(x) = \begin{cases} x \sin(\frac{1}{x}), & \text{if } x \neq 0 \\ 0, & \text{if } x = 0 \end{cases}$

答:

4. 令 $a = \arccos(-0.7)$. 以下何者為正數?

(A) a (B) $\tan a$ (C) $\sec a$ (D) $\cos(2a)$ (E) $\ln|\csc a|$

答:

5. 以下級數何者收斂?

- (A) $\sum_{n=2}^{\infty} n^{-\pi}$ (B) $\sum_{n=2}^{\infty} n\pi^{-n}$ (C) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ (D) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$
 (E) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^n}{n!}$

答:

6. 設 $0 \leq a < b$, $f' : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 為連續函數且在 $[a, b]$ 區間上 $f(x) > 0$, 函數圖形 $y = f(x)$ 下方與 $x = a$, $x = b$, $y = 0$ 所圍成的區域稱為 Ω , 則下列敘述何者恆正確?

(A) f 的函數圖形之弧長為 $\int_a^b \sqrt{x^2 + [f(x)]^2} dx$.

(B) f 的函數圖形繞著 x 軸旋轉所得到的旋轉曲面的面積為 $\int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$.

(C) f 的函數圖形繞著 y 軸旋轉所得到的旋轉曲面的面積為 $\int_a^b 2\pi x \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$.

(D) 將 Ω 繞著 x 軸旋轉所得到的旋轉體體積為 $\int_a^b 2\pi f(x) dx$.

(E) 將 Ω 繞著 x 軸旋轉所得到的旋轉體體積為 $\int_a^b \pi [f(x)]^2 dx$.

答:

乙、計算證明題 (需寫完整的解答過程)

1. (10 分) 求點 $(1, 1)$ 到拋物線 $y = 2x^2$ 的最短距離。

2. (8 分) 已知 $-\frac{\pi}{2} < a < b < \frac{\pi}{2}$, 證明: $\tan b - \tan a \geq b - a$.

3. 設

$$f(x) = \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{t^2}{t^4+1} dt + \int_0^x \frac{1}{t^4+1} dt, \quad x \neq 0$$

- a. (4 分) 計算 $f'(x)$.
- b. (4 分) 計算 $f(1) + f(-1)$. (提示: $\int \frac{1}{t^4+1} dt$ 算不出來, 請用別種方法)
- c. (6 分) 利用前兩小題, 計算 $f(3) + f(-2)$.

4. (10 分) 設

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}, \quad x > 0.$$

a. 求 $f(x)$ 的極大值.

b. 利用上題, 證明: $\pi^e < e^\pi$.

5. (10 分) 求積分:

$$\int \sin(\sqrt[3]{x}) dx$$

6. (8 分) 求極限

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^{\frac{5}{3}}$$

7. (10 分) 設 $f(x) = \cos(x^2)$. 求 $f^{(2014)}(0)$. (提示: 利用 $\cos x$ 的 Maclaurin series)