學系：________________ 學號：________________ 姓名：__________________

注意：禁止使用計算器。

問題	1：10 分	2：10 分	3：10 分	4：10 分	5：10 分	總分：100 分
得分						
問題	6：10 分	7：10 分	8：10 分	9：10 分	10：10 分	
得分						

1. 是非題：對的打〇，錯的打╳，無需寫出任何計算過程。(每小題 2 分)

_____ ①如果 f(x)是連續函數，且 f(1)=1，則存在 $\delta>0$ 使得 $\frac{1}{2}<\mathbf{f(x)}<\mathbf{2}$ 對所有 x，$|\mathbf{x}-\mathbf{1}|<\boldsymbol{\delta}$ 成立。

_____ ②如果$\lim_{x\to 0^+}\acute{f}(x)$ 與 $\lim_{x\to 0^-}\acute{f}(x)$ 都存在且相等，則 f(x)在 x=0 可微分。

_____ ③如果$\lim_{m\to\infty}\int_{-m}^{m}f(t)dt=0$，則瑕積分$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)dt=0$ 。

_____ ④已知 f(x)是連續函數，若$\int_1^{\infty}(f(x))^2\,dx$ 收斂，則$\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ 。

_____ ⑤若$\lim_{x\to\infty}f(x)$及$\lim_{x\to\infty}g(x)\cdot f(x)$皆收斂，則$\lim_{x\to\infty}g(x)$亦收斂。

2. 令$y=f(x)=\frac{\ln(x^2)}{x^2}, x\neq 0$，求 y=f(x)的垂直與水平漸近線。

3. $\mathbf{f(x) = x^{(\pi^x)}}$, 求 $\mathbf{\acute{f}(x)} = ?$

4. 已知對所有實數而言，$\mathbf{(f(x) - x)(f(x) + x) = 0}$，若 $f(x)$是可微分函數，求 $f(x)$的所有可能性並解釋為何你的答案是完整的。

5. 求$\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\sin^{2013}x}{4+\cos^{27}x}+\cos^2 x\cdot\sin^2 x\right)dx$ 之值。

6. 令$F(x)=\int_0^x t\,e^{\sin t}\,dt$，證明對所有實數 x，$F(x)\geq 0$恆成立。

7．令Ω為$\mathbf{y} = \mathbf{x}^{\frac{3}{2}} + \mathbf{1}$，y 軸與 y=9 所圍成的區域。求Ω繞 y 軸旋轉所得旋轉體的體積。

8．令$\mathbf{a}_{\mathbf{n+1}} = \frac{\mathbf{a}_{\mathbf{n}}}{\mathbf{2}(\mathbf{a}_{\mathbf{n}}+\mathbf{1})}$ 且$\mathbf{a}_{\mathbf{1}} = \mathbf{1}$，證明$\mathbf{lim}_{\mathbf{n}\to\infty} \mathbf{a}_{\mathbf{n}}$存在，並求此極限。

9. 判斷下列敘述是否正確，並解釋你的判斷根據。

①若$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收斂，則$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收斂。

②若$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 與$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 皆收斂，則$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 也收斂。

10. ①求$\int_0^1 te^t\,dt$ 之值。

②利用①求$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!\,(n+2)}$ 之值。

E = easy　　M = Medium，H = hard

(M)

1.

（每大題各 10分）

是非題，對的打 O，錯的打 X，無需寫出任何計算過程。（每小題 2分）

O　ⓐ 如果 $f(x)$ 是連續函數，且 $f(1)=1$，則存在 $\delta>0$ 使得 $\frac{1}{2}<f(x)<2$ 對所有 x，$|x-1|<\delta$ 成立。

X　ⓑ 如果 $\lim_{x\to 0^+} f'(x)$ 與 $\lim_{x\to 0^-} f'(x)$ 都存在且相等，則 $f(x)$ 在 $x=0$ 可微分。

X　ⓒ 如果 $\lim_{M\to\infty} \int_{-M}^{M} f(t)\,dt = 0$，則瑕積分 $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = 0$

O　ⓓ 已知 $f(x)$ 是連續函數，若 $\int_1^\infty (f(x))^2 dx$ 收斂，則 $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

X　ⓔ 若 $\lim_{x\to\infty} f(x)$ 及 $\lim_{x\to\infty} g(x)\cdot f(x)$ 皆收斂，則 $\lim_{x\to\infty} g(x)$ 亦收斂。

(M)

2. 令 $y = f(x) = \dfrac{\ln(x^2)}{x^2}$, $x \neq 0$.

求 $y=f(x)$ 的垂直與水平漸近線.

Sol. when $a \neq 0$, $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\ln x^2}{x^2} = \dfrac{\ln a^2}{a^2}$

by continuity of $f(x)$ at $x \neq 0$.

Assume $\lim\limits_{x \to 0} \ln x^2 = B$.

Then $\underbrace{\lim\limits_{x \to 0} x^2}_{=0} = e^B$.

Hence $\lim\limits_{x \to 0} \ln x^2 = -\infty$ (3分)

Then $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln x^2}{x^2} = -\infty$ and $x=0$

is the vertical asymptote of $y=f(x)$. (2分)

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{\ln x^2}{x^2} \underset{\text{L'Hopitals}}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x^2}(2x)}{2x} = 0 \quad (3分)$$

Hence $y=0$ is the horizontal asymptote.

(2分)

E: Easy

M: Medium

H: Hard

3. (E) $f(x) = x^{(\pi^x)}$, 求 $f'(x) = ?$

$\log f(x) = \pi^x \log x$

$\frac{f'(x)}{f(x)} = (\log\pi)\pi^x \log x + \pi^x \cdot \frac{1}{x}$

$\therefore f'(x) = x^{(\pi^x)}\left[(\log\pi \cdot \log x)\pi^x + \pi^x \cdot \frac{1}{x}\right]$

$= \pi^x x^{(\pi^x)}\left(\log\pi \cdot \log x + \frac{1}{x}\right)$

(H)
(四)

已知對所有實數而言 $(f(x)-x)(f(x)+x)=0$

若 $f(x)$ 是可微分函數，求 $f(x)$ 的所有可能性並解釋為何你的答案是完整的.

---

sol:

Answer: $f(x)=x$ or $f(x)=-x$

$|f(x)|=|x|$ [If $f(x_1)>0$ and $f(x_2)<0$, for some $x_1>x_2>0$,

then there exists $x_2<x_3<x_1$ s.t. $f(x_3)=0$

by Intermediate Theorem for Continuous functions.] (3分)

(Note that Differentiable functions are continuous)

But $\underset{0}{\underset{\shortparallel}{f(x_3)}} = \underset{0}{\underset{\nparallel}{x_3}}$ $\times$.

Hence, if $f(x_1)>0$ then $f(x_2)>0$ for all $x_1, x_2>0$. same argument shows $f(x)f(y)>0$ if $xy>0$.

~~Similarly~~ ~~if $f(x_4)<0$~~ There are only 4 possibilities for ~~$f(x)=$~~ continuous $f(x)$:

$f_1(x)=x$, $f_2(x)=-x$,

$f_3(x)=|x|$, $f_4(x)=-|x|$. } (3分)

Only f_1 and f_2 are differentiable. (4分)

M
(0)

5. 求 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\sin^{2013}x}{4+\cos^{27}x}+\cos^2 x\sin^2 x\right)dx$ 之值.

Sol since $\dfrac{\sin^{2013}x}{4+\cos^{27}x}$ is odd, hence

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^{2013}x}{4+\cos^{27}x}dx=0. \quad (3分)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 x\sin^2 x\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2 dx$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{4}\sin^2(2x)\,dx$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{4}\left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{8}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos 4x)\,dx$$

$$=\frac{2\pi}{8}=\frac{\pi}{4} \quad (7分)$$

(M)

6. 令 $F(x)=\int_0^x t e^{\sin t}\,dt$.

證明對所有實數 x, $F(x)\geq 0$ 恆成立。

Sol.

Note that $f(t)= t e^{\sin t}$ is a continuous function and we can apply Fundamental Theorem of Calculus. Then

$$F'(x)= x e^{\sin x} \begin{cases} >0 & \text{if } x>0 \\ <0 & \text{if } x<0. \end{cases}$$

(4分)

Hence $F(0)=0$ is the absolute Minimum value of $y=f(x)$. (4分)

That is $F(x)\geq 0$. (2分)

E 7.

令 Ω 為 $y = x^{\frac{3}{2}} + 1$，y軸與 $y=9$ 所圍成的區域。求 Ω 繞 y軸旋轉所得旋轉體的體積.

Sol

① Disc : 交點 (4,9) , (0,1) (4分)

$$\int_1^9 \pi (y-1)^{\frac{4}{3}} dy = \pi \int_0^8 t^{\frac{4}{3}} dt = \frac{384}{7}\pi$$ (6分)

$\boxed{\text{or}}$

② Shell : $y = x^{\frac{3}{2}} + 1$ and $y = 9$ intersect at (4,9)

$y = x^{\frac{3}{2}} + 1$ and y-axis 〃 at (0,1) (4分)

$$\int_0^4 2\pi x \left(9 - x^{\frac{3}{2}} - 1\right) dx$$

$$= 2\pi \int_0^4 x\left(8 - x^{\frac{3}{2}}\right) dx = \frac{384}{7}\pi$$ (6分)

H

~~四~~ 8. (H)

令 $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2(a_n + 1)}$，且 $a_1 = 1$.

證明 $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$ 存在，並求此極限。

Sol. $a_1 = 1$, $a_2 = \dfrac{1}{2(\cancel{1}+1)} = \dfrac{1}{\cancel{4}}$.

$a_3 = \dfrac{\frac{1}{\cancel{4}}}{2(\frac{1}{\cancel{4}}+1)} = \cancel{\frac{1}{6}}\ \dfrac{1}{10}$, ...

Guess $a_n \downarrow$ and $0 \le a_n \le 1$, $\forall n$.

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2(a_n+1)}$$

$a_1 = 1 \ge 0$. assume $0 \le a_k$ $\Rightarrow$ $a_{k+1} = \dfrac{a_n}{2(a_n+1)} \ge 0$

By induction, $a_k \ge 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$. (3分)

Then $\dfrac{a_n}{2(a_n+1)} - a_n = a_n\left[\dfrac{1}{2(a_n+1)} - 1\right]$

$$= \frac{a_n[-1-2a_n]}{2(a_n+1)} < 0 \quad (3分)$$

Hence $a_n \downarrow$. Monotone decreasing sequence (4分)

with a lower bound is convergent. Assume $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x$

$\Rightarrow$ ... x ... $x\left[\dfrac{2x+1}{\ldots}\right]$ ... since ...

9.

判斷下列敘述是否正確。並解釋你的判斷根據。

E (a) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收斂，則 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收斂。

H (b) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 與 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 皆收斂，則 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 也收斂。

Sol:

(a) Not true (b) true (各一分)

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$, but $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ (4分)

(b)
$$\frac{a_n^2 + b_n^2}{2} \geq \sqrt{a_n^2 b_n^2} = |a_n b_n|$$

By comparison test, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$ converges,

since both $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{2}$ and $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n^2}{2}$ converge.

Then $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ also converge. (4分)

(絕對收斂必收斂)

10.

(a) 求 $\int_0^1 te^t\,dt$ 之值。（4分）
(E)

(b) 利用(a)求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!(n+2)}$ 之值。（6分）
(H)

Sol. Let $f(t)=t$, $g'(t)=e^t$.

(a)
$$\int_0^1 te^t\,dt = t\cdot e^t\Big|_0^1 - \int_0^1 1\cdot e^t\,dt$$
(integration by parts)
$$= e^1 - (e^t)\Big|_0^1 = 1$$
（4分）

(b) Let $F(x)=\int_0^x te^t\,dt \Rightarrow F'(x) = xe^x$

$$F'(x) = x\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}, \quad \forall x\in\mathbb{R}.$$
（3分）

Then $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+2)\cdot n!}$. (Note $F(0)=0$.)

Hence
$$F(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)\cdot(n!)} = \int_0^1 te^t\,dt = 1$$
（3分）

and
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!(n+2)} = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$